Ejercicios Resueltos del Mini Parcial 24 Abril 2014

Ingeniería de Control

3º Curso. Grado de Ingeniería de Técnicas Industriales

Cuestión 1 (*2 p*)

Ventajas e inconvenientes del uso del método de los mínimos cuadrados para la identificación del modelo de un sistema.

Cuestión 2 (*2 p*)

Supóngase que la función de transferencia de $G(s)$ viene definida a traves de la expresión

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = e^{-t} - 1 + \frac{2t}{\ln 2}.$$

Obtenga la función de transferencia en el dominio de z del bloque compuesto por un mantenedor de orden cero y un sistema continuo modelado por la función de transferencia $G(s)$. Supóngase que $T = \ln 2$ es el periodo de muestreo.

Solución:

Teníendo en cuenta que la función de transferencia del mantenedor de orden cero $H(s)$ es

$$H(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

obtenemos que la salida (en el dominio del tiempo) frente a una entrada impulsional es

$$g_h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{(1 - e^{-Ts})\frac{G(s)}{s}\right\}$$

Si denotamos

$$g_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\},$$

y tenemos en cuenta que e^{-Ts} representa la función de transferencia de un retardo igual al tiempo de muestreo obtenemos

$$g_h(t) = g_1(t) - g_1(t-T).$$

Si denotamos como $g_h[k]$ y $g_1[k]$ las secuencias resultantes de muestrear $g_h(t)$ y $g_1(t)$ con periodo $T = \ln 2$ obtenemos

$$g_h[k] = g_1[k] - g_1[k-1].$$

Por otra parte tenemos del enunciado del problema que

$$g_1(t) = e^{-t} - 1 + \frac{2t}{\ln 2}.$$

Si denotamos como $g_h[k]$ y $g_1[k]$ las secuencias resultantes de muestrear $g_h(t)$ y $g_1(t)$ con periodo $T = \ln 2$ obtenemos

$$g_1[k] = e^{-kT} - 1 + \frac{2kT}{\ln 2} = e^{-k\ln 2} - 1 + 2k = \left(\frac{1}{2}\right)^k - 1 + 2k.$$

La transformada z de $g_1[k]$ se obtiene pues de las transformadas de las señales elementales $(\frac{1}{2})^k$, 1 y k.

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\} &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z^{-1}}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{z^{-1}}{2}} = \frac{2z}{2z-1} \\
\mathcal{Z}\{1\} &= \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \\
\mathcal{Z}\{k\} &= \sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k} = z\sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k-1} = -z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dz}(z^{-k}) \\
&= -z\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right) \\
&= -z\left(\frac{z-1-z}{(z-1)^2}\right) = \frac{z}{(z-1)^2}.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$G_1(z) = \mathcal{Z}\{g_1[k]\} = \frac{2z}{2z-1} - \frac{z}{z-1} + \frac{2z}{(z-1)^2}.$$

La función de transferencia requerida es

$$\begin{aligned}
G_h(z) &= \mathcal{Z}\left\{g_h[k]\right\} = \mathcal{Z}\left\{g_1[k] - g_1[k-1]\right\} = (1-z^{-1})G_1(z) \\
&= \frac{z-1}{z}\left(\frac{2z}{2z-1} - \frac{z}{z-1} + \frac{2z}{(z-1)^2}\right) \\
&= \frac{2(z-1)}{2z-1} - 1 + \frac{2}{z-1} \\
&= \frac{2(z-1)^2 - (2z-1)(z-1) + 2(2z-1)}{(2z-1)(z-1)} \\
&= \left(\frac{2z^2 - 4z + 2 - 2z^2 + z + 2z - 1 + 4z - 2}{(2z-1)(z-1)}\right) \\
&= \frac{3z-1}{(2z-1)(z-1)}
\end{aligned}$$

Cuestión 3 (*2 p*)

Suponga que el sistema

$$G(z) = \frac{1}{z(z+1)}$$

se controla con el controlador proporcional $C(z) = K$ utilizando una estructura de realimentación negativa. Determine la estabilidad o inestabilidad del sistema en bucle cerrado en función de K utilizando la tabla de Jury.

Solución:

La función del sistema en bucle cerrado es

$$G_{BC}(z) = \frac{KG(z)}{1+KG(z)} = \frac{K}{z(z+1)+K}$$

La estabilidad del sistema está garantizada si el polinomio caracterítico

$$z^2 + z + K = 0$$

tiene todas sus raíces dentro del círculo unidad. Formamos la tabla de Jury

1	1	K	
K	1	1	
$1-K^2$	$1-K$		$(\alpha_2 = K)$
$1-K$	$1-K^2$		
$1-K^2-\frac{1-K}{1+K}$			$(\alpha_1 = \frac{1}{1+K})$

Para que el sistema sea estable

$$\begin{aligned} 1-K^2 &\geq 0 \\ 1-K^2-\frac{1-K}{1+K} &\geq 0 \end{aligned}$$

De la primera restricción se induce que el valor absoluto de K debe ser menor o igual que uno. De la segunda obtenemos

$$\begin{aligned} 1-K^2-\frac{1-K}{1+K} &= (1-K)\left(1+K-\frac{1}{1+K}\right) \\ &= \frac{1-K}{1+K}\big((1+K)^2-1\big) \\ &= \frac{1-K}{1+K}\big(K^2+2K\big) \\ &= \frac{K(1-K)(K+2)}{1+K} \geq 0 \end{aligned}$$

De la anterior ecuación y del hecho de que $|K| \leq 1$ obtenemos que $K > 0$. Por tanto, la estabilidad está garantizada para $K \in (0,1)$.

Cuestión 4 (*2p*)

Dado el sistema

$$G(z) = \frac{3}{(3z+1)(2z+1)},$$

determine un controlador que garantize que el sistema controlado tenga un polo en $z = 0$ y otro en $z = \frac{1}{3}$ y un error permanente frente entrada escalón unitario igual a cero.

Solución:

Dado que $G(z)$ no tiene ni ceros ni polos inestables la estructura de la función de transferencia deseada $G_d(z)$ será de la forma

$$G_d(z) = \frac{a}{z(z-\frac{1}{3})}$$

Nótese que la estructura propuesta garantiza la causalidad del controlador puesto que tiene la misma diferencia de ceros y polos que la función de transferencia en bucle abierto $G(z)$. La especificación en error permanente se garantiza si $G_d(1) = 1$. De aquí se infiere el valor de a:

$$G_d(1) = \frac{a}{1(1-\frac{1}{3})} = \frac{3a}{2} = 1.$$

Por tanto $a = \frac{2}{3}$ y

$$G_d(z) = \frac{2}{z(3z-1)}$$

Finalmente el controlador $C(z)$ se obtiene como

$$\begin{aligned} C(z) &= \frac{G_d(z)}{G(z)} \left(\frac{1}{1-G_d(z)} \right) \\ &= \frac{2(3z+1)(2z+1)}{3z(3z-1)} \left(\frac{z(3z-1)}{z(3z-1)-2} \right) \\ &= \left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{(3z+1)(2z+1)}{3z^2-z-2} \right) = \frac{2(3z+1)(2z+1)}{3(z-1)(3z+2)}. \end{aligned}$$

Cuestión 5 (*2p*)

Control en cascada.