Mini Curso LMIs

Departamento Informática y Automática. UNED

Teodoro Alamo Cantarero

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática
Escuela Superior de Ingenieros
Universidad de Sevilla

7 Mayo 2012

Estructura de la Presentación

LMIs y Teoría del Control Automático

- Una gran variedad de problemas de control se pueden formular como desigualdades lineales matriciales (Linear Matrix Inequalities LMIs).
- En 1890, Lyapunov mostró que la estabilidad del sistema $\dot{x} = Ax$ es equivalente a la existencia de una matriz definida positiva P que cumpliese la desigualdad matricial $A^T P + PA < 0$.
- Algunos criterios de estabilidad que surgieron en los años 40 y 50 para sistemas con restricciones en los actuadores se pueden formular de forma sencilla como LMIs.
- En el libro "Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory" (Boyd *et al* 1994) aparecen una gran batería de problemas de control que pueden ser formulados como LMIs.

Algoritmos de Punto Interior

- Los LMIs no empezaron a utilizarse de forma generalizada en el mundo del control automático hasta los años 90.
- Motivo: Los ordenadores de antaño no tenían la capacidad de cálculo necesaria y además no existían algoritmos eficientes.
- A principios de los 90 apareció una nueva familia de métodos de punto interior capaces de resolver con eficiencia los problemas formulados como LMIs. (Nesterov et al 1994).

Algoritmos de Punto Interior

- En términos generales, los algoritmos de punto interior requieren menos de 100 iteraciones.
- El número de iteraciones requeridos depende poco del número de variables de decisión y de la precisión requerida.
- En el contexto del control automático, el número de operaciones elementales requerido para cada iteración crece con n^6, donde n es la dimensión del vector de estado.

Algoritmos de Punto Interior

- En 1995 apareció el Toolbox de LMIs para Matlab (Gahinet *et al* 1995).
- Existen muchas herramientas de cálculo orientadas a la resolución de problemas LMIs: SeDuMi, SDPT3, etc.
- YALMIP es un interfaz de libre distribución que permite formular los problemas LMIs que permite elegir entre distintas herramientas de resolución.

Nociones preliminares

Definición

Una matriz real simétrica H se dice **definida positiva** *si todos sus autovalores son extrictamente mayores que cero.*

De la misma manera, una matriz real simétrica H se dice que es **definida negativa** *si todos sus autovalores son estrictamente menores que cero.*

Notación

Dadas la matrices simétricas H y G, la notación $H > G$ significa que $H - G$ es definida positiva. De la misma manera, $H < G$ denota que $H - G$ es definida negativa.

Noción de Desigualdad Matricial Lineal

Definición

Decimos que la desigualdad matricial $H(X_1, \ldots, X_m) > 0$ *es una desigualdad matricial lineal (LMI) en las variables de decisión* X_1, X_2, ..., X_m *si:*

1. $H(X_1, \ldots, X_m)$ *es una matriz simétrica para todo* X_1, ..., X_m.
2. *La dependencia de* $H(X_1, \ldots, X_m)$ *con respecto a* X_1, ..., X_m *es afín.*

Ejemplos LMIs

Las desigualdades matriciales:

- $S > 0.$
- $\mathrm{I} - S + BY + Y^T B^T < 0.$
- $\begin{bmatrix} S & BY + CZ \\ Y^T B^T + Z^T C^T & S \end{bmatrix} > 0.$

son desigualdades matriciales lineales en las variables de decisión $S = S^T$, Y y Z.

Ejemplos de no LMIs

Las siguientes desigualdades no son LMIs en las variables de decisión $S = S^T$ y Y:

- $BY > 0$ no es un LMI porque el término BY no es simétrico para todo Y.
- $S + Y^T S + SY < 0$ no es un LMI porque la dependencia con respecto S e Y no es afín.

Convexidad

- Considérese el siguiente conjunto de p desigualdades matriciales lineales:

$$H_i(X_1, \ldots, X_m) < 0, \quad i = 1, \ldots, p$$

  Estas pueden ser reescritas como:

$$\lambda_{max}(H_i(X_1, \ldots, X_m)) < 0, \; i = 1, \ldots, p$$

  donde $\lambda_{max}(\cdot)$ representa el mayor autovalor.
- Como $\lambda_{max}(\cdot)$ es una función convexa se infiere que cada LMI impone una restricción convexa a las variables de decisión.
- Como la intersección de conjuntos convexos es a su vez un conjunto convexo, el conjunto de variables de decisión que hacen que se cumplan todos LMIs es un conjunto convexo.

Propiedades Esenciales

Propiedad

Dada la matriz simétrica H, se cumple que $x^T Hx > 0$ para todo $x \neq 0$ si y sólo si $H > 0$.

Esta propiedad permite convertir restricciones del tipo "para todo x" en desigualdades matriciales que no dependen de x.

Propiedad

Dada una matriz no singular T: $H > 0$ si y sólo si $T^T HT > 0$.

Esta propiedad se utiliza para hacer cambios de variables.

Complemento Schur

Propiedad (Complemento Schur)

Las desigualdades matriciales:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} H & > & 0 \\ T - S^T H^{-1} S & > & 0 \end{array} \right.$$

se satisfacen si y sólo si $\begin{bmatrix} T & S^T \\ S & H \end{bmatrix} > 0$

Concepto de distancia ponderada

- Dada una matriz definida positiva P, definimos la norma ponderada $\|\cdot\|_P$ como:

$$\|x\|_P = \sqrt{x^T P x}.$$

- La función $V(x) = x^T P x$ no es una norma.
- Una forma de demostrar estabilidad es probando que la distancia al origen siempre es decreciente:

$$\frac{d}{dt}\|x\|_P < 0, \quad \forall x \neq 0$$

- Como $\|\cdot\|_P$ no es diferenciable en el origen, es mejor utilizar la condición equivalente:

$$\frac{d}{dt}V(x) < 0, \forall x \neq 0.$$

Ejemplo 1: Estabilidad de un sistema en tiempo continuo

- Considérese la función cuadrática $V(x) = x^T P x$.
- La estabilidad del sistema $\dot{x} = Ax$ está garantizada si y sólo si existe $P > 0$ tal que $\frac{d}{dt}V(x) < 0, \ \forall x \neq 0$.
- Esta restricción se puede reescribir como:

$$\frac{d}{dt}V(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T(A^T P + PA)x < 0, \quad \forall x \neq 0$$

- Teniendo ahora en cuenta la propiedad 1, resulta que el sistema es estable si y sólo si existe P que satisfaga los siguientes dos LMIs:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A^T P + PA & < & 0 \\ P & > & 0 \end{array} \right.$$

Ejemplo 2: Estabilidad de un sistema en tiempo discreto

- Considérese el sistema $x_{k+1} = Ax_k$.
- El sistema es estable si y sólo si existe $P > 0$ tal que $x_{k+1}^T P x_{k+1} < x_k^T P x_k, \;\; \forall x_k \neq 0$. Esto es,

$$x_k^T (A^T PA - P) x_k < 0, \;\; \forall x_k \neq 0.$$

  Esta restricción es equivalente a: $A^T PA - P < 0$.
- Por tanto, el sistema es estable si y sólo si existe P tal que:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P & > & 0 \\ A^T PA - P & < & 0 \end{array} \right.$$

Ejemplo 3: Estabilización de un sistema en tiempo continuo

- Considérese el sistema $\dot{x} = Ax + Bu$.
- El problema de obtener una realimentación lineal estabilizante de la forma $u = Kx$ se puede escribir como un LMI.
- El sistema en bucle cerrado es estable $\dot{x} = (A + BK)x$ si y sólo si existe $P = P^T > 0$ tal que:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (A+BK)^T P + P(A+BK) & < & 0 \\ P & > & 0 \end{array} \right.$$

- Es importante resaltar que la primera desigualdad matricial no es un LMI porque hay dos términos no lineales: $K^T B^T P$ y PBK.

Ejemplo 3: Continuación

- Pre-multiplicando y post-multiplicando las desigualdades por $(P^{-1})^T = P^{-1}$ y P^{-1} respectivamente, se obtienen las siguientes condiciones equivalentes (propiedad 2):

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P^{-1}A^T + P^{-1}K^TB^T + AP^{-1} + BKP^{-1} & < & 0 \\ P^{-1} & > & 0 \end{array} \right.$$

- Haciendo ahora el cambio de variable: $S = P^{-1}$ y $Y = KP^{-1}$, se obtienen los siguientes LMIs:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} SA^T + Y^TB^T + AS + BY & < & 0 \\ S & > & 0 \end{array} \right.$$

- Se concluye que si existen S e Y satisfaciendo los LMIs anteriores entonces la ley de control $u = Kx = YS^{-1}x$ estabiliza el sistema.

Cambio de variable en el problema de Síntesis

- El cambio de variable utilizado en el ejemplo anterior aparece frecuentemente en los problemas de síntesis.
- Cuando se formula un problema de síntesis en términos de una ganancia K y una función de Lyapunov $V(x) = x^T Px$, las desigualdades obtenidas suelen contener términos bilineales de la forma PK.
- Afortunadamente es fácil reescribir las desigualdades en forma de LMIs haciendo el cambio de variable

$$S = P^{-1}, \quad Y = KP^{-1}.$$

- Esto se consigue en muchas ocasiones pre-multiplicando y post-multiplicando las desigualdades por P^{-1}.

Ejemplo 4: Ubicación de polos

- Dado el sistema $\dot{x} = Ax + Bu$, obtener una realimentación del vector de estado de la forma $u = Kx$ de forma que la parte real de los autovalores de $A + BK$ sean estríctamente menores que $-\rho$, donde $\rho > 0$.
- Los autovalores de $(A + BK + \rho \mathrm{I})$ son iguales a los autovalores de $A + BK$ más la constante ρ.
- Por tanto, el problema de síntesis es equivalente a la obtención de K de forma que el sistema $\dot{x} = (A + BK + \rho \mathrm{I})x$ sea estable.

Ejemplo 4: Continuación

- Como ya se ha visto, $\dot{x} = (A + BK + \rho \mathrm{I})x$ es estable si y sólo si existe una matriz $P > 0$ tal que $(A + BK + \rho \mathrm{I})^T P + P(A + BK + \rho \mathrm{I}) < 0$.
- Nótese que la desigualdad obtenida no es una LMI por culpa de los términos PK.
- Aplicamos la estrategia propuesta: pre y post multiplicamos por P^{-1} la desigualdad:

$$\begin{aligned} P^{-1}[(A + BK + \rho \mathrm{I})^T P + P(A + BK + \rho \mathrm{I})]P^{-1} &< 0 \\ P^{-1}A^T + P^{-1}K^T B^T + AP^{-1} + BKP^{-1} + 2\rho P^{-1} &< 0 \end{aligned}$$

- Realizando el cambio de variable $S = P^{-1}$, $Y = KP^{-1}$ obtenemos: $SA^T + AS + BY + Y^T B^T + 2\rho S < 0$.

Ejemplo 4: Continuación

- Pre y post multplicando la restricción $P > 0$ por P^{-1} obtenemos $P^{-1} = S > 0$.
- Por tanto, si se obtienen matrices S y Y tales que $S > 0$ y $SA^T + AS + BY + Y^T B^T + 2\rho S < 0$, entonces la ley de control $u = Kx = YS^{-1}x$ satisface la restricción en los polos.
- Otras técnicas más sofisticadas pueden ser utilizadas para problemas más genéricos de ubicación de polos. (Chilali *et al* 1999).

Ejemplo 5: Síntesis para sistemas en tiempo discreto

- Considérese ahora el problema de obtener una realimentación del vector de estado $u = Kx$ para el sistema $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$.
- El sistema es estable si existe una matriz P de forma que

$$P - (A + BK)^T P(A + BK) > 0.$$

- Pre y post multiplicando por P^{-1}:

$$P^{-1} - P^{-1}(A + BK)^T P(A + BK)P^{-1} > 0.$$

Ejemplo 5: Continuación

- En las variables $S = P^{-1}$ y $Y = KP^{-1}$ obtenemos:

$$S - (SA^T + Y^T B^T) S^{-1} (AS + BY) > 0.$$

- A esto hay que añadir que $P > 0$, o equivalentemente $S > 0$.
- Aplicando el complemento Schur obtenemos que las restricciones del problema se pueden reescribir como

$$\begin{bmatrix} S & SA^T + Y^T B^T \\ AS + BY & S \end{bmatrix} > 0$$

- Si existen matrices S e Y que satisfagan el anterior LMI entonces la realimentación buscada es $u = Kx = YS^{-1}x$

LMIs ToolBox Matlab: Definición Variables

- El comando `setlmis([])` sirve para liberar de memoria todas las variables y LMIs existentes. Debe ser invocado cada vez que se quiera formular un nuevo problema LMI.
- Se pueden definir variables de decisión matriciales simétricas, rectangulares, etc ...
- Las variables se definen con el comando `lmivar`
- Cada variable de decisión se referencia a través de un entero.
- Internamente todas las variables de decisión se aglutinan en un vector `x`.

LMIs ToolBox Matlab: Definición Variables

- Cuando se invoca a `lmivar` el primer parámetro es 1 si la variable es simétrica y 2 en caso contrario.
- Si la variable es simétrica de dimensión $n \times n$ el segundo parámetro es `[n 1]`.
- Si la variable es rectangular de dimensión $m \times n$ el segundo parámetro es `[m n]`.
- Es posible definir otros tipos de variables de decisión.

LMIs ToolBox Matlab: Definición Variables

- Para obtener un entero `S` que referencie a una variable matricial `Smat` simétrica y de dimensión $n \times n$:

```
S=lmivar(1,[n 1])
```

- Para obtener un entero `Y` que referencie a una variable matricial `Ymat` rectangular y de dimensión $m \times n$:

```
Y=lmivar(2,[m n])
```

- No confundir los enteror `S` y `Y` con las matrices `Smat` e `Ymat`:
  - Supóngase que `x` es la variable que representa el vector que aglutina todas las componentes de las distintas variables de decisión matriciales del problema LMI.
  - Una vez resuelto el problema LMI, la matriz `Smat` se puede obtener de `x` y del entero S utilizando el comando `dec2mat`.

LMIs ToolBox Matlab: Definición LMIs

- Para definir un LMI nuevo se utiliza el comando `newlmi`.
- Cada uno de los términos se introduce con el comando `lmiterm`.
- Se asume que los LMIs se expresan siempre con el signo $<$.
- Los términos que están a la izquierda del signo $<$ tienen tratamiento distinto que los situados a la derecha.
- Hay que distinguir entre la inclusión de un término constante y un término que dependa de una variable de decisión.
- Invocar `help lmiterm` para una detallada descripción del uso.

LMIs ToolBox Matlab: Definición LMIs

El LMI

$$0 < \begin{bmatrix} S & SA^T + Y^T B^T \\ AS + BY & S \end{bmatrix}$$

se codifica como:

```
KLMI=newlmi;
lmiterm([-KLMI 1 1 S],1,1);
lmiterm([-KLMI 1 2 S],1,A');
lmiterm([-KLMI 1 2 -Y],1,B');
lmiterm([-KLMI 2 2 S],1,1);
```

LMIs ToolBox Matlab: Resolución

Una vez definidos los LMIs:

- Recapitulación de toda la información en la variable `lmisys`:

```
lmisys=getlmis;
```

- Resolución:

$$[t,x] = feasp(lmisys);$$

- Obtención variables matriciales:

```
Ymat=dec2mat(lmisys,x,Y);
```

- Obtención de las matrices P y K:

```
P=inv(Smat);
```

```
K=Ymat*P;
```

Ejemplo 6: Restricciones en la acción de control

- Supóngase que la acción de control $u(t)$ es un escalar.
- Denótese $x(0)$ la condición inicial.
- Problema de síntesis. Obténgase una realimantación $u(t) = Kx(t)$ de modo y forma que la trayectoria converja al origen y
$$|u(t)| = |Kx(t)| \leq u_{max}, \quad \forall t \geq 0$$
- Las restricciones en el vector de estado y el caso de acción de control vectorial se aborda de forma similar.

Example 6: Continuación

El problema de síntesis se resuelve si se garantiza

1. La derivada respecto del tiempo de $V(x) = x^T P x$ es negativa para todo x distinto del origen.
2. $x(0)$ pertenece al elipsoide $\mathcal{E} = \{ x \; : \; x^T P x \leq 1 \}$.
3. El máximo de $|Kx|$ en el elipsoide $\mathcal{E}$ es menor que u_{max}.

- El cumplimiento de las dos primeras restricciones garantiza que el sistema nunca abandona el elipsoide $\mathcal{E}$ y además que la trayectoria es convergente al origen.
- La tercera restricción garantiza que la acción de control nunca supera el valor u_{max}.

Ejemplo 6: Continuación

- Como se ha visto, la primera restricción se puede garantizar incluyendo el siguiente LMI en las variables de decisión $S = P^{-1}$ y $Y = KP^{-1}$:

$$AS + SA^T + BY + Y^T B^T < 0.$$

- Utilizando el complemento Schur la restricciones $P > 0$ y $x(0)^T P x(0) < 1$ se reescriben como

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & S \end{bmatrix} > 0$$

Ejemplo 6: Continuación

- Se puede demostrar que

$$\begin{aligned} \sqrt{c^T P^{-1} c} &= \max_x \; c^T x \\ & \quad s.a. \;\; x^T P x \leq 1 \end{aligned}$$

- Por tanto, la tercera restricción se garantiza si

$$\sqrt{KP^{-1}K^T} < u_{max}.$$

- Esto es equivalente a $KP^{-1}K^T < u_{max}^2$.
- En el cambio de variables se expresa como $YS^{-1}Y^T < u_{max}^2$.
- Finalmente aplicamos el complemento a Schur y obtenemos

$$\begin{bmatrix} u_{max}^2 & Y \\ Y^T & S \end{bmatrix} > 0$$

Ejemplo 6: Resumen

Concluimos que para resolver el problema de estabilización sujeto a restricciones en la acción de control hay que incluir los LMIs:

$$AS + SA^T + BY + Y^T B^T < 0.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & S \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} u_{max}^2 & Y \\ Y^T & S \end{bmatrix} > 0$$

Ejemplo 7: Estabilización de plantas con incertidumbres

- Una de las propiedades más relevantes de los LMIs es que en muchas ocasisones es inmediato convertir un problema nominal en un problema robusto.
- Por ejemplo, supóngase que tenemos un sistema dado por

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i(t)(A_i x + B_i u)$$

donde $\lambda_i(t)$, $i = 1, \ldots, q$ toman siempre valores no negativos y

$$\sum_{i=1}^{q} \lambda_i(t) = 1, \ \ \forall t.$$

- El objetivo es obtener una ley de control $u(t) = Kx(t)$ que estabilice el sistema.

Ejemplo 7: Continuación

- Nótese que

$$\frac{d}{dt}(x^T P x) = 2x^T P \sum_{i=1}^{q} \lambda_i(t)(A_i x + B_i u)$$

es una función lineal de $\lambda_i(t)$.

- La peor situación se obtiene en los valores extremos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(x^T P x) &= 2x^T P \sum_{i=1}^{q} \lambda_i(t)(A_i x + B_i u) \\
&\leq \max_{i=1,\ldots,q} 2x^T P \sum_{i=1}^{q} (A_i x + B_i u) \\
&= \max_{i=1,\ldots,q} x^T P(A_i + B_i K)x + x^T (A_i + B_i K)^T P x
\end{aligned}$$

Ejemplo 7: Continuación

- Resulta pues que si garantizamos que

$$x^T P(A_i+B_iK)x+x^T(A_i+B_iK)^T Px < 0, \ \forall x \neq 0, \ i = 1, \dots, q$$

entonces

$$\frac{d}{dt}(x^T Px) < 0, \quad \forall x \neq 0$$

y hemos resuelto el problema.

- Como hemos visto, las anteriores restricciones se pueden reescribir como

$$A_iS + SA_i^T + B_iY + Y^T B_i^T < 0, \quad i = 1, \dots, q.$$

Donde $S = P^{-1} > 0$ e $Y = KP^{-1}$.

Conclusiones

- Hemos presentado las propiedades más relevantes de los LMIs.
- Se ha mostrado cómo muchos problemas de control automático se pueden formular como LMIs:
  1. Análisis de estabilidad
  2. Estabilización de sistemas.
  3. Control sujeto a restricciones.
  4. Control robusto.
- Otros problemas como control óptimo, control H_∞, estimación de estado, etc pueden ser consultados en "Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory" (Boyd *et al* 1994)