Ingeniería de Control

Tema 4. Proceso de Muestreo

Daniel Rodríguez Ramírez
Teodoro Alamo Cantarero

Contextualización del tema

- Conocimientos que se adquieren en este tema:
  - Conocer el proceso de muestreo de sistemas continuos.
  - Entender como es el espectro de una señal muestreada con respecto al de la señal original.
  - Conocer el procedimiento ideal para reconstruir una señal y las condiciones sobre el tiempo de muestreo para que sea posible.
  - Saber identificar el problema del aliasing y sus causas.
  - Conocer el proceso de reconstrucción usando mantenedores y los distintos tipos que hay.
  - Saber obtener la función de transferencia pulsada de un sistema.

Esquema del tema

3.1. Introducción.

3.2. Repaso de la transformada de Fourier.

3.3. Muestreo de sistemas continuos.

3.4. Reconstrucción de una señal muestreada.

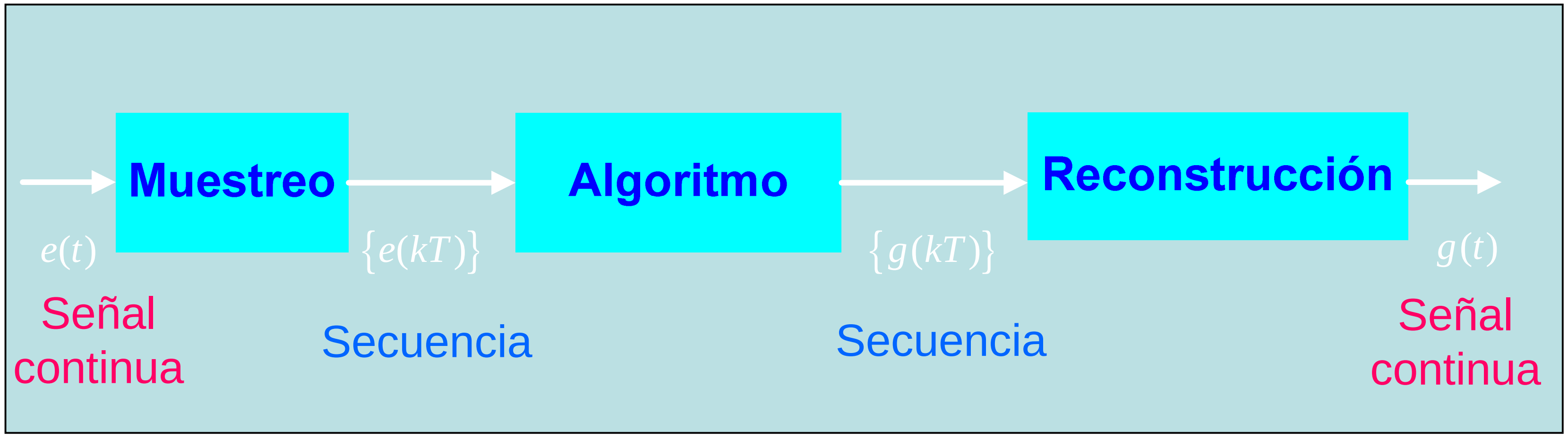
3.5. Aliasing o enmascaramiento de frecuencias.

3.6. Reconstrucción usando mantenedores.

3.7. Obtención de la función de transferencia pulsada.

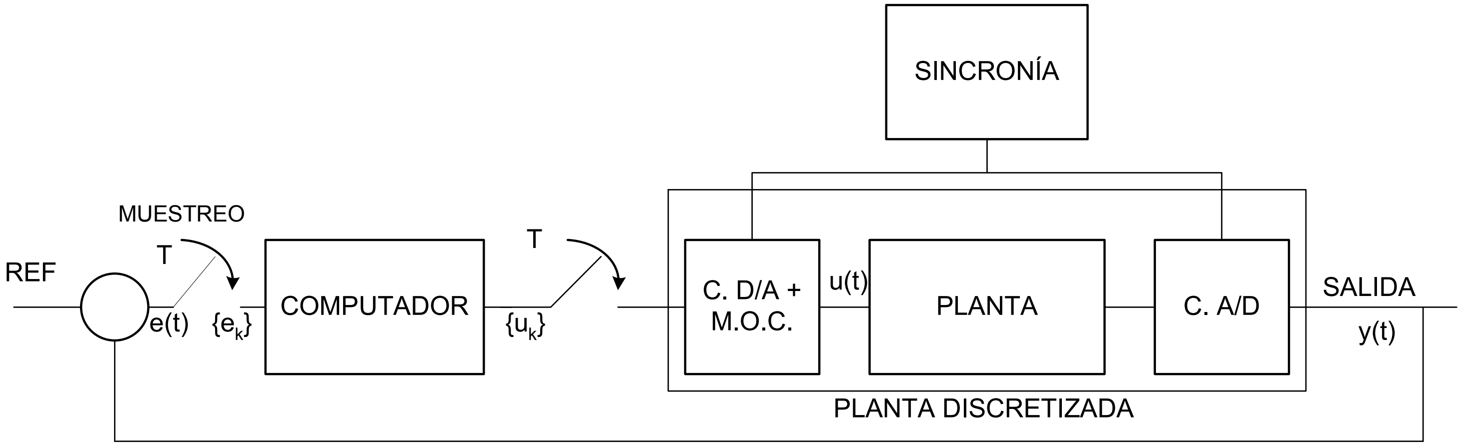
Introducción

- El muestreo es una proceso básico en los sistemas de control por computador.
- El muestreo significa que **una señal continua es reemplazada por una secuencia de números que representan los valores de la señal en los instantes de muestreo**.
- Los aspectos que hay que tener en cuenta son:



Introducción

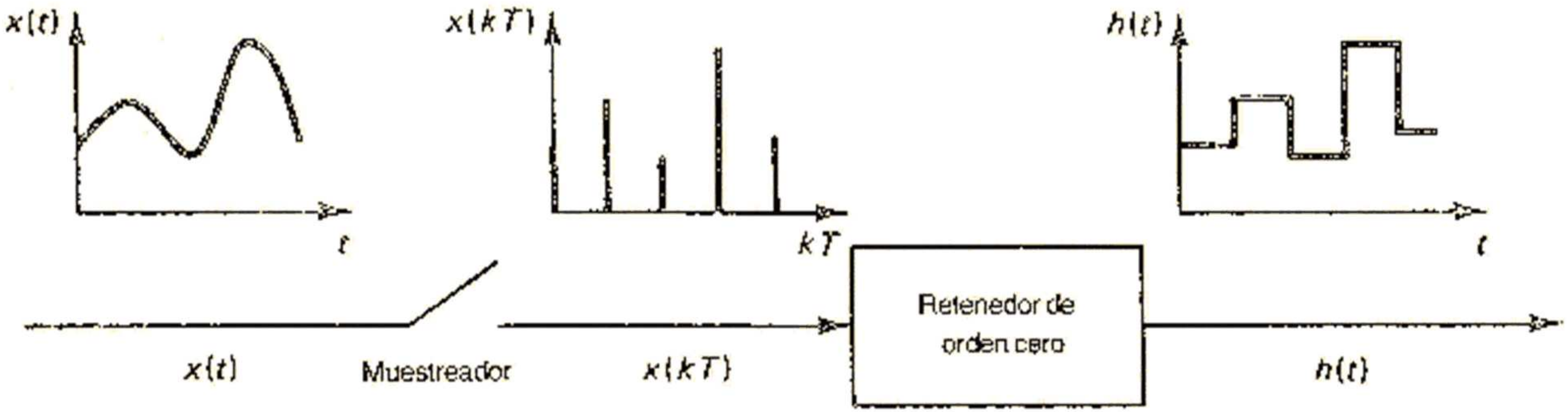
- ¿ Como se muestrea un sistema continuo para controlarlo con un computador ?
- ¿ Como afecta el muestreo a la dinámica percibida ?
- ¿ Como se puede reconstruir una señal a partir de su muestreo ?
- Esquema de un sistema de control por computador:



- La señal de error solo llega al computador en determinados instantes y la salida del computador (la actuación) solo se conecta en esos mismos instantes. Los instantes están separados por el tiempo de muestreo T.
- Entre esos instantes la actuación se mantienen constante mediante un mantenedor de orden cero.

Introducción

- Efecto de usar muestreo y un mantenedor de orden cero sobre una señal continua:



- En resumen, el proceso de muestreo implica:
  1. Muestrear la señal de error, conectándola al ordenador cada T segundos.
  2. Mantener la señal de control constante entre un instante de muestreo y el siguiente.

Esquema del tema

3.1. Introducción.

3.2. Repaso de la transformada de Fourier.

3.3. Muestreo de sistemas continuos.

3.4. Reconstrucción de una señal muestreada.

3.5. Aliasing o enmascaramiento de frecuencias.

3.6. Reconstrucción usando mantenedores.

3.7. Obtención de la función de transferencia pulsada.

Repaso de la transformada de Fourier

- La transformada de Fourier de una señal periódica $f_t(t)$ de periodo T es:

$$F_T(\omega_n) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-j\omega_n t} dt \qquad \text{donde } \omega_n = \frac{2\pi}{T} n \quad n = 0, \pm 1, \ldots$$

- Por otra parte la antitransformada es:

$$f_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} F_T(\omega_n) e^{j\omega_n t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} F_T(\omega_n) e^{j\omega_n t} \Delta\omega \qquad \text{donde } \Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$$

- Si la señal no es periódica la transformada y antitransformada son:

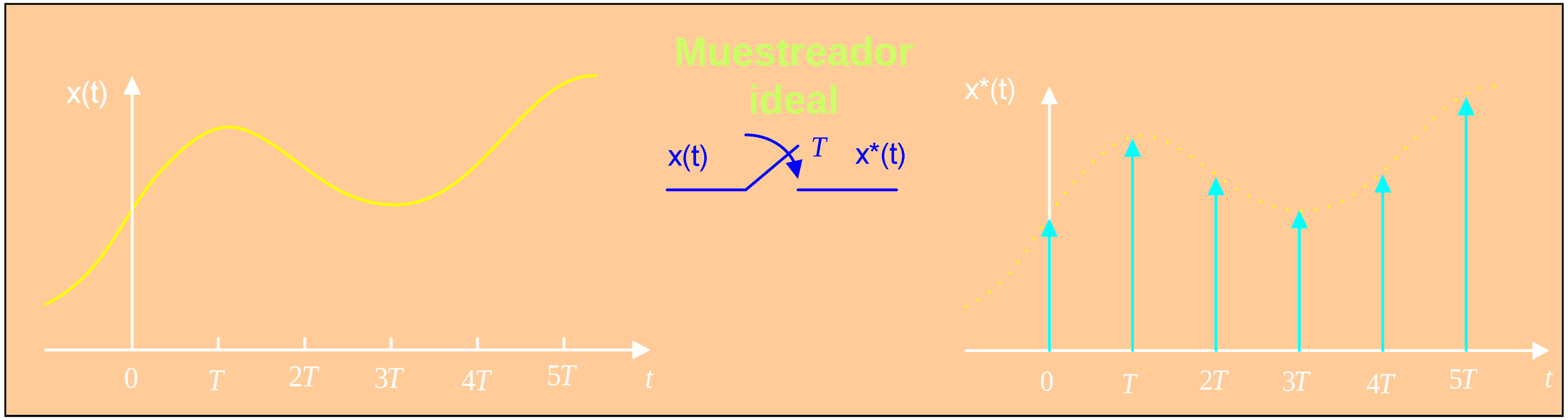
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{j\omega t} dw$$

- La transformada de Fourier de una señal da una idea de la distribución de energía de la misma sobre el espectro de frecuencias que esta ocupa.
- Las señales periódicas ocupan un espectro finito, mientras que las aperiodicas tienen un espectro infinito.

Esquema del tema

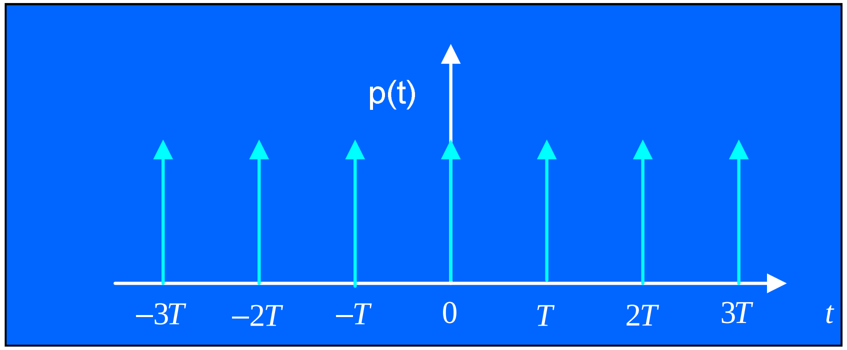
Muestreo de Sistemas Continuos

• El muestreador es el elemento que obtiene la secuencia a partir de la señal continua.



Los instantes en los que se "cierra" el contacto se pueden representar como un tren de impulsos:

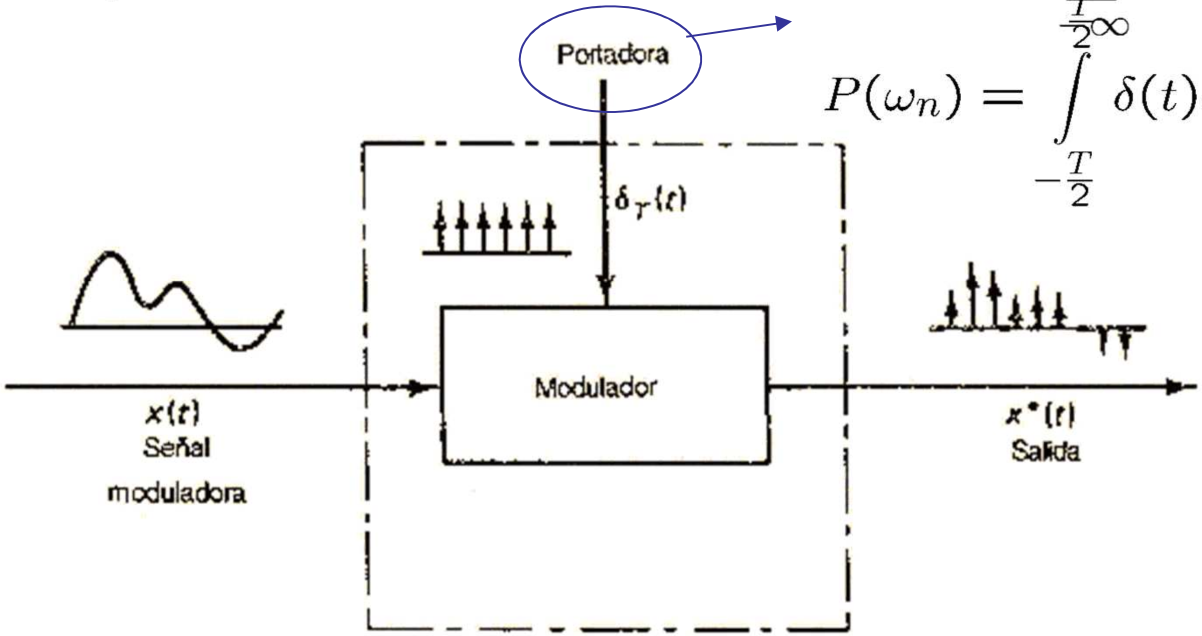
$$p(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$



Muestreo de Sistemas Continuos

- El proceso puede verse como una modulación: $p(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$

$$P(\omega_n) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-j\omega_n t} dt = 1$$



- La señal muestreada se calculará como:

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(t)\delta(t - kT) = x(t) \cdot p(t)$$

y su transformada de Fourier como:

$$X^*(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot p(t) e^{-j\omega t} dt$$

Muestreo de Sistemas Continuos

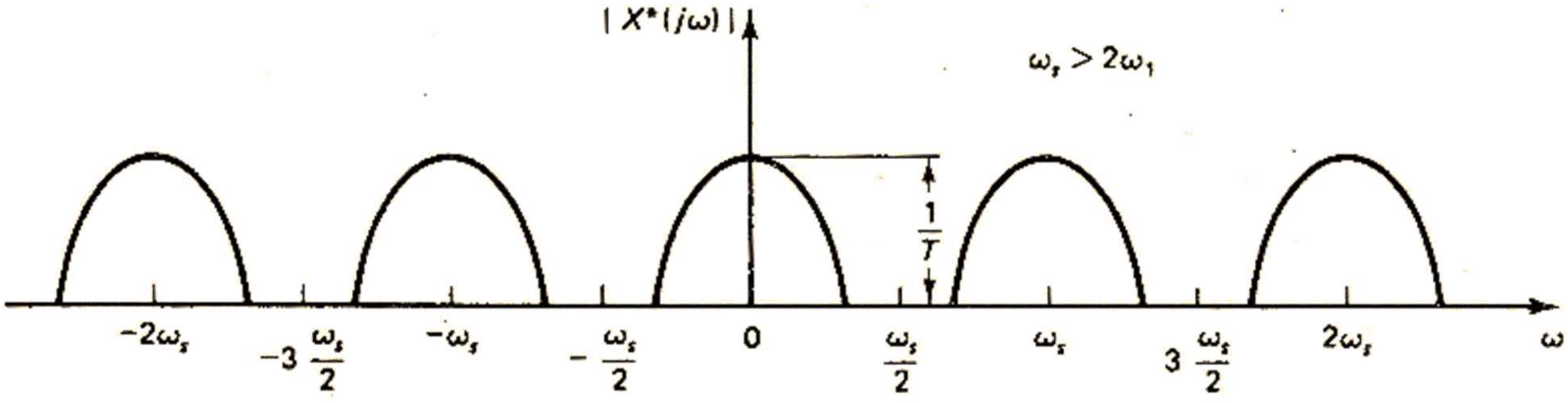
- Teniendo en cuenta que $P(\omega_n) = 1$ y aplicando la antitransformada:

$$p(t) = \frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_n t}$$

- Sustituyendo en la expresión $X^*(\omega)$ se obtiene:

$$X^*(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\left[\frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_n t}\right] e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - \omega_n) \qquad \omega_n = \frac{2\pi}{T} n$$

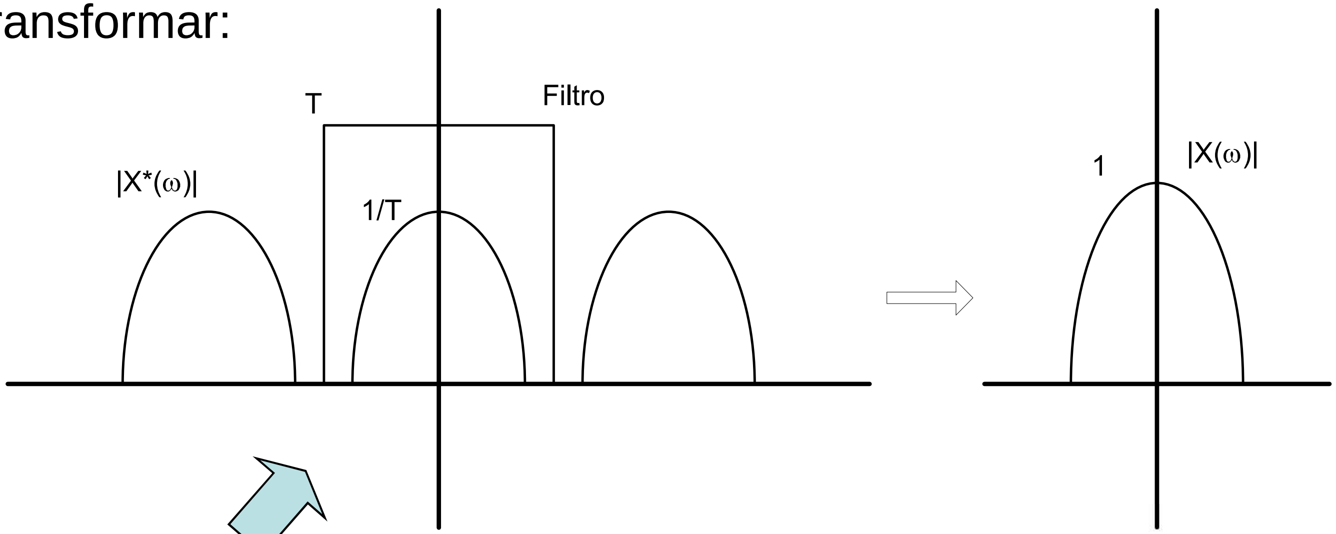
El espectro en frecuencia de la señal muestrada $x^*(t)$ tiene la misma forma que la de la señal sin muestrar $x(t)$, atenuada por un factor $1/T$ y repetida en la frecuencia cada $\Delta\omega = 2\pi/T$ radianes por segundo.



Esquema del tema

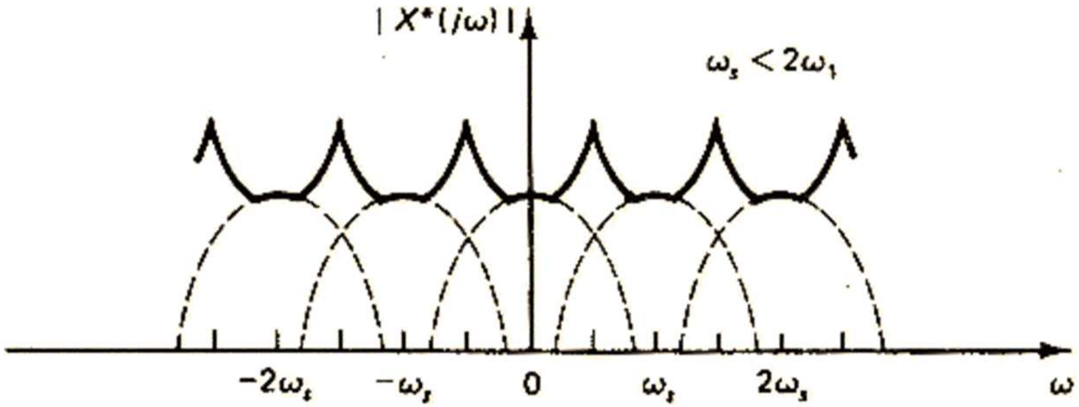
Reconstrucción de una señal muestreada

- Obtener la señal continua original a partir de la señal muestreada.
- La idea sería filtrar uno de los espectros de la señal original y a partir de ahí antitransformar:



Posible por que las repeticiones de X(ω) no se solapan

Si el tiempo de muestreo aumenta llegará un punto en que se solapen

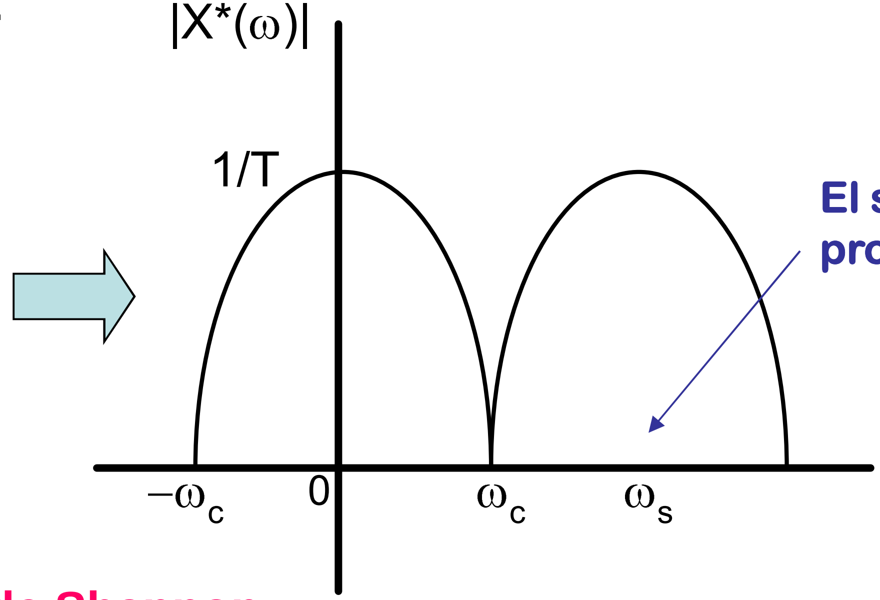


¡ Imposible reconstruir la señal !

Reconstrucción de una señal muestreada

- Los centros de las repeticiones del espectro de X(w) están separados por $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ radianes por segundo.
- Por otra parte las repeticiones tienen energía hasta una determinada frecuencia ω_c.

Esta es la situación límite



El solape comienza a producirse cuando $\omega_s = 2\omega_c$

Teorema de Shannon

La frecuencia ω_s a la que debe muestrearse una señal debe ser al menos el doble de aquella frecuencia más alta ω_c para la que el sistema tiene alguna energía.

- El tiempo máximo de muestreo sería $T \leq \dfrac{\pi}{\omega_c}$ pero en la práctica suele ser mucho menor.

Esquema del tema

3.1. Introducción.

3.2. Repaso de la transformada de Fourier.

3.3. Muestreo de sistemas continuos.

3.4. Reconstrucción de una señal muestreada.

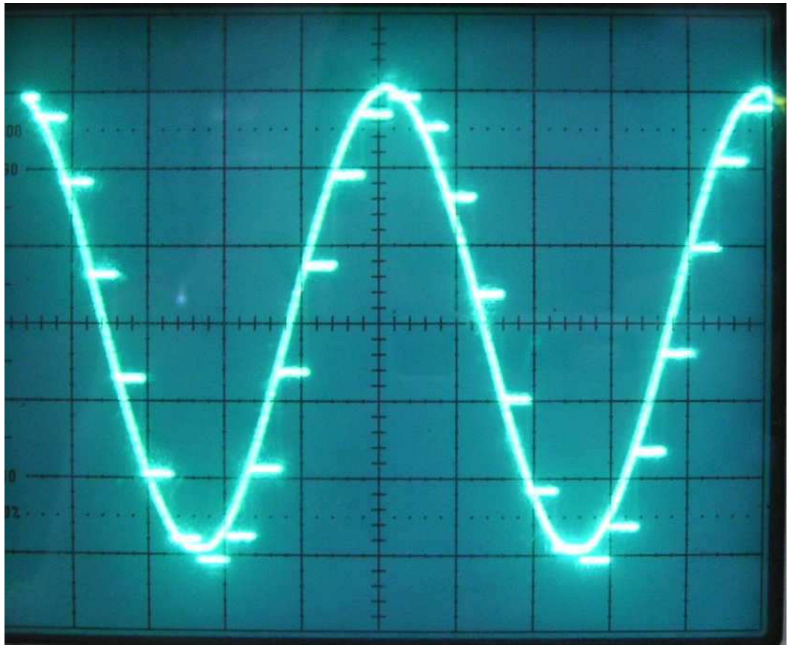
3.5. Aliasing o enmascaramiento de frecuencias.

3.6. Reconstrucción usando mantenedores.

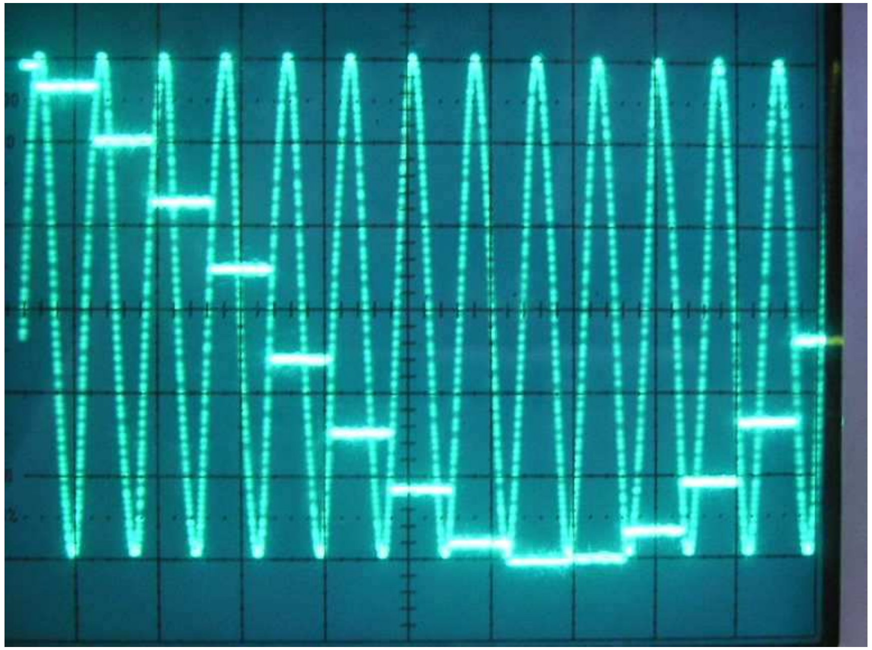
3.7. Obtención de la función de transferencia pulsada.

Aliasing o enmascaramiento de frecuencias

- Este fenómeno aparece cuando se muestrea una señal a una tasa inferior a la de Shannon y se intenta reconstruir después.
- Al reconstruir la señal se obtiene otra de diferente frecuencia.



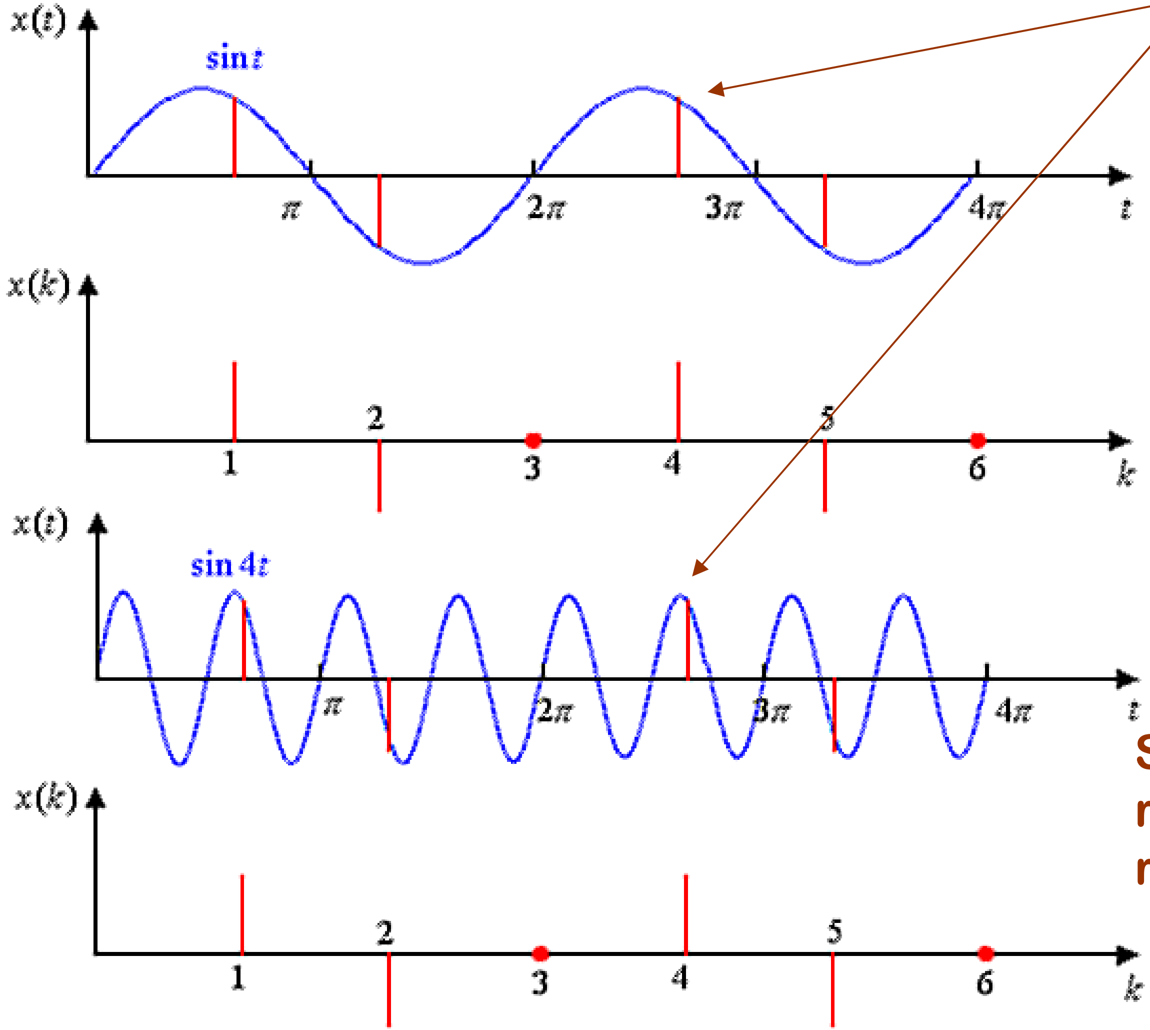
Muestreo correcto



Muestreo a una tasa insuficiente

- El aliasing aparece cuando al muestrear dos señales se obtienen los mismos valores.

Aliasing



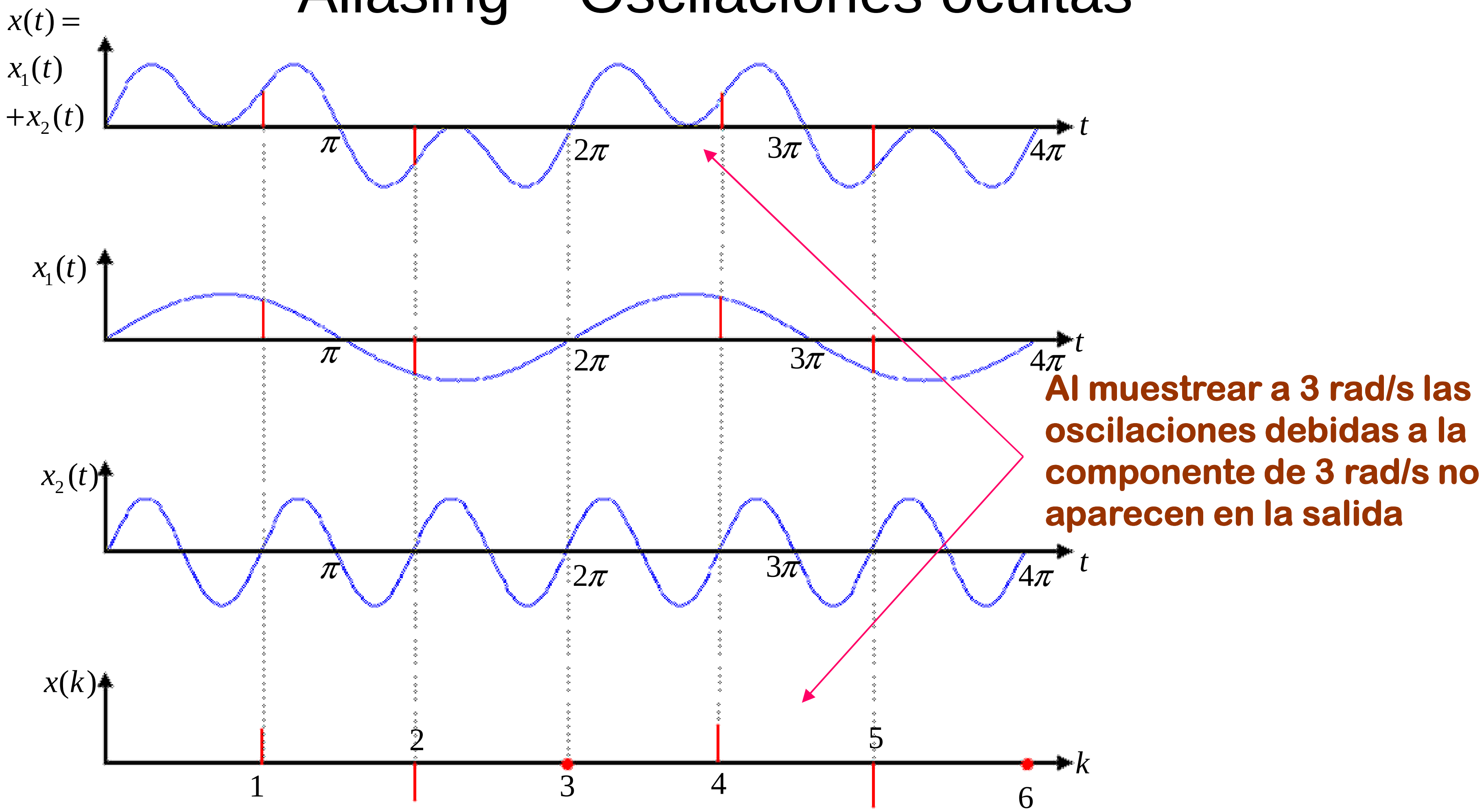
Ambas señales tienen los mismos valores en los instantes de muestreo

Señal x(t) de frecuencia 1 rad/s muestreada a 3 rad/s → reconstrucción correcta

Señal x(t) de frecuencia 4 rad/s muestreada a 3 rad/s → reconstrucción incorrecta

Aparece el aliasing, pues la componente de 4 rad/s aparece en la salida como si fuera de 1 rad/s.

Aliasing – Oscilaciones ocultas



Si la señal x(t) contiene una componente con frecuencia *n* veces la frecuencia de muestreo, entonces esta componente puede no aparecer en la salida. Estas oscilaciones entre los tiempos de muestreo son las "oscilaciones ocultas".

Esquema del tema

Reconstrucción usando mantenedores

- La reconstrucción de señales usando un filtros ideal no es posible ya que este es no causal → irrealizable.

- La alternativa es usar mantenedores:

$$x(t) \cong x_r(t) = x(kT) + x'(kT)(t-kT) + \cdots + \frac{x^{(n)}(kT)}{n!}(t-kT)^n$$

$$kT \le t < (k+1)T$$

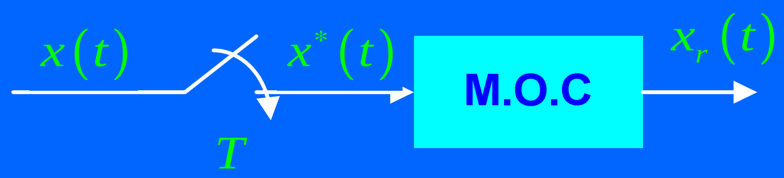
donde $x^{(n)}(kT)$ denota la enésima derivada de x(t) en $t=kT$.

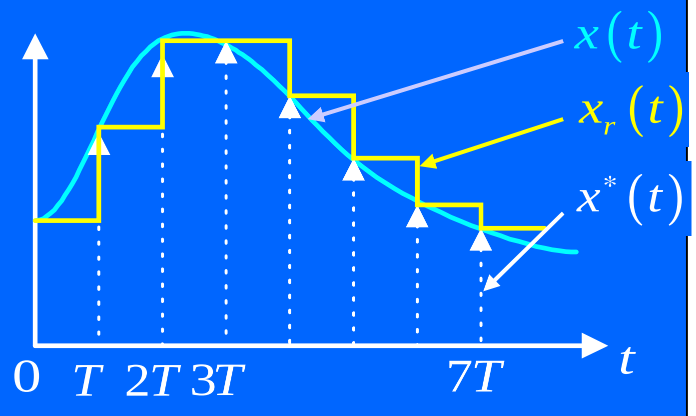
- A mayor orden mejor precisión en la reconstrucción pero por otra parte aparecen problemas de estabilidad.
- Usualmente se usa el de orden cero o uno.

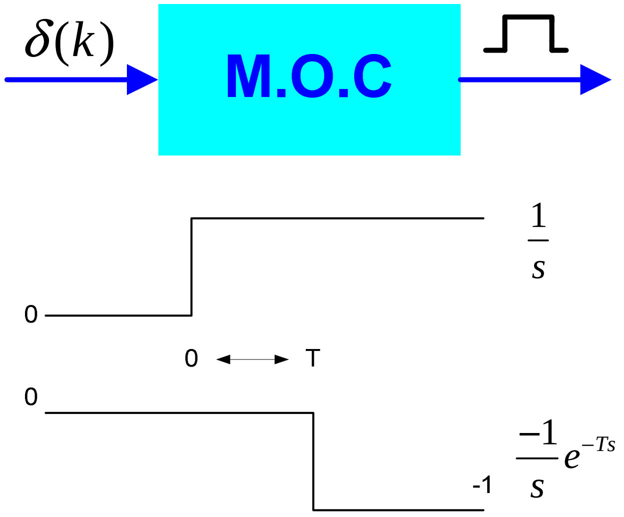
Mantenedor de orden cero

$$x(t) \approx x_r(t) = x(kT)$$

$$para \quad kT \le t < (k+1)T$$







A partir de la **respuesta impulsional** del mantenedor de orden cero se puede sacar su función de transferencia como suma de dos señales escalón de signo opuesto y una de ellas retrasada T segundos:

$$G_{ho}(s) = \frac{1}{s} + \frac{-1}{s}e^{-Ts} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

Mantenedor de orden cero

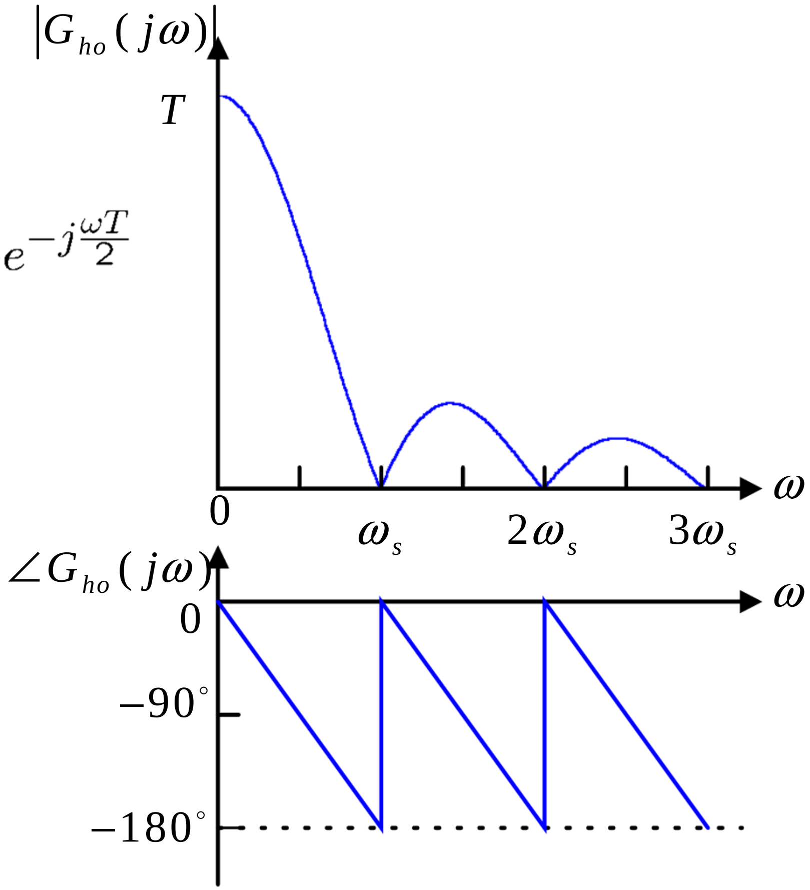
Respuesta frecuencial del mantenedor de orden cero:

$$G_{ho}(j\omega) = \frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega} = T\frac{e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{2j\frac{\omega T}{2}} e^{-j\frac{\omega T}{2}}$$

$$= T\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}} e^{-j\frac{\omega T}{2}}$$

y como $\frac{\omega T}{2} = \frac{\omega}{2}\left(\frac{2\pi}{\omega_s}\right) = \frac{\pi\omega}{\omega_s}$:

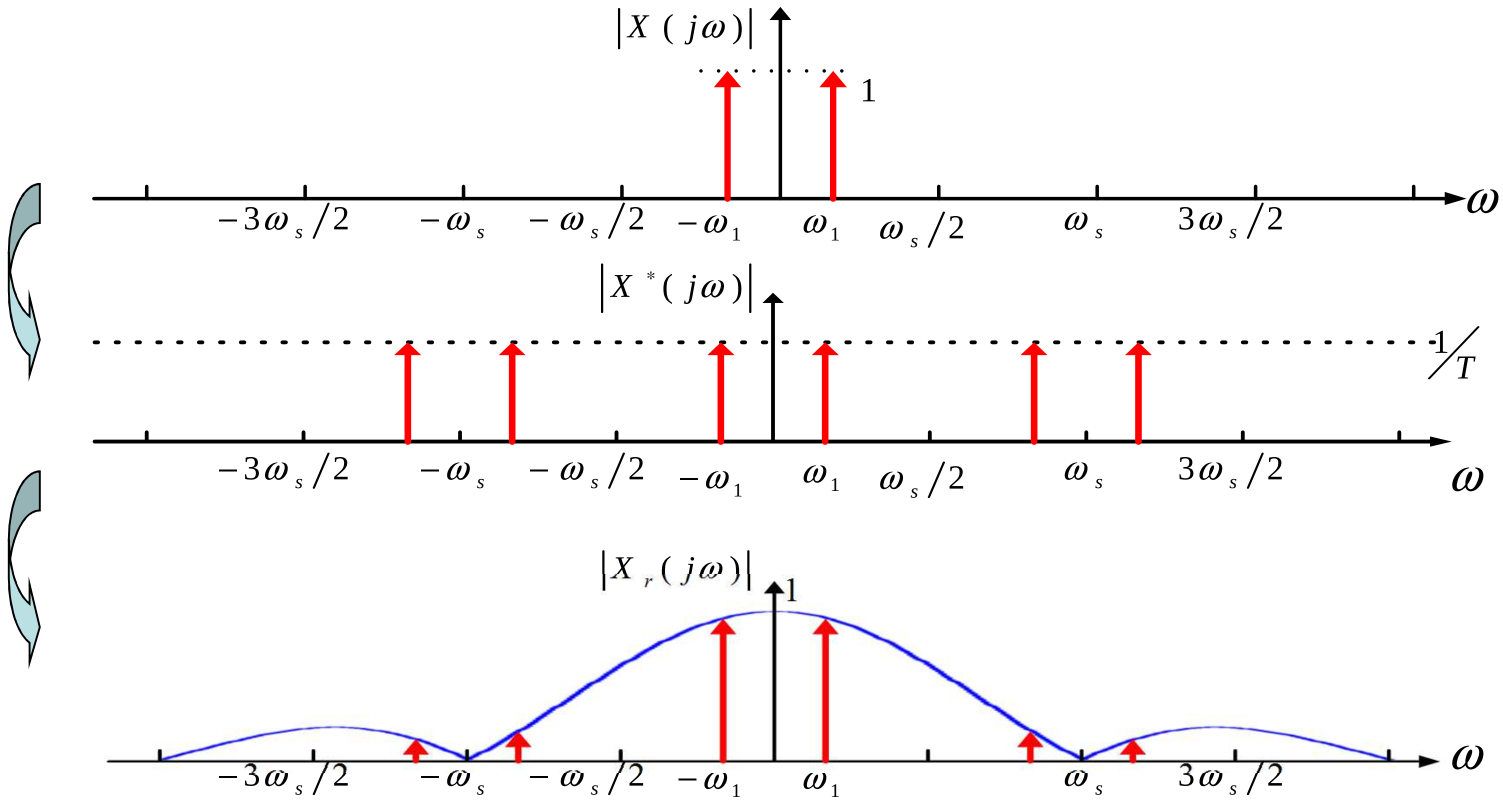
$$G_{ho}(j\omega) = T\frac{\sin\left(\frac{\pi\omega}{\omega_s}\right)}{\frac{\pi\omega}{\omega_s}} e^{-j\frac{\pi\omega}{\omega_s}}$$



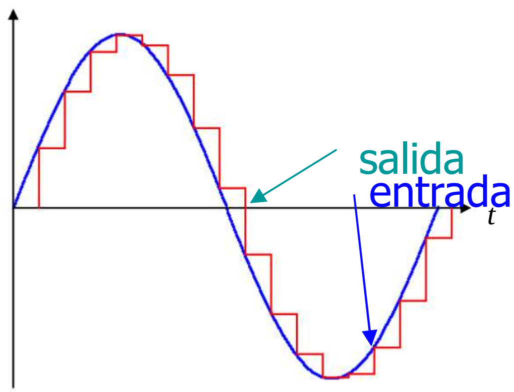
Efecto del muestreador + mantenedor de orden cero

Muestr. ideal

M.O.C.



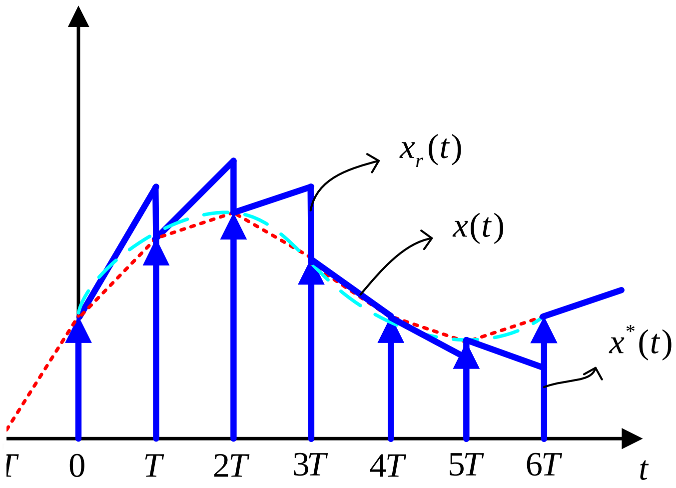
- **Supóngase una sinusoide de frecuencia ω_1 aplicada a un muestreador ideal.**
- **Si $\omega_1 << \omega_s /2$ los componentes de alta frecuencia de $X^*(j\omega)$ aparecerán cerca de los ceros de $G_{ho}(j\omega)$. De esta manera el muestreador y el M.O.C. tendrán poco efecto sobre la señal reconstruida.**

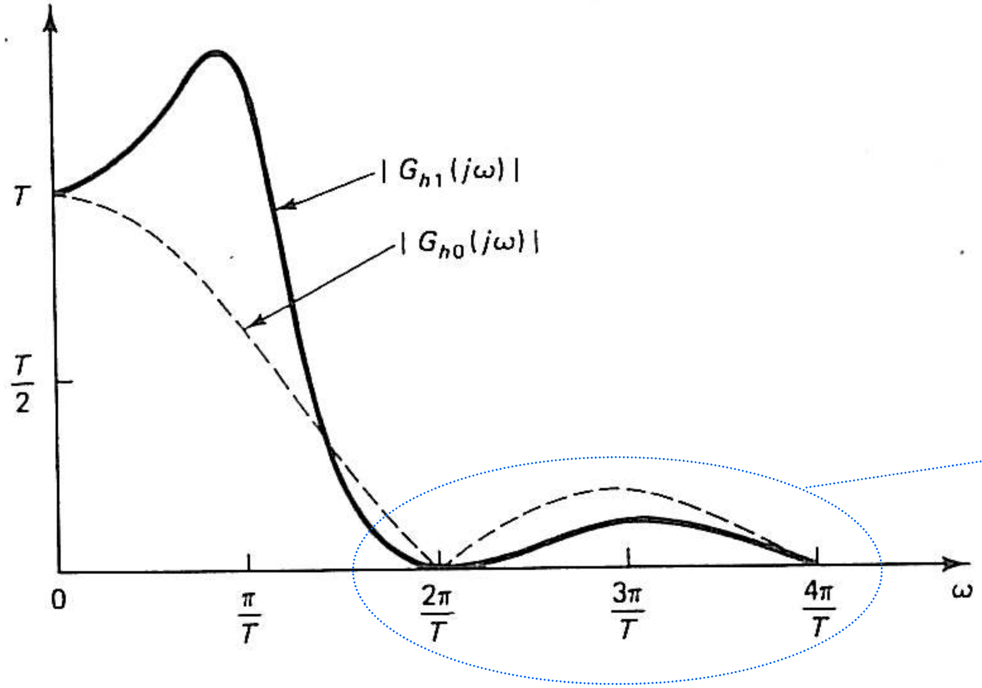


Mantenedor de orden 1

Necesita dos puntos de la señal para interpolar con una recta.

Es mejor filtro que el de orden cero pero la diferencia no es muy signicativa.





Atenúa más las repeticiones del espectro

Esquema del tema

3.1. Introducción.

3.2. Repaso de la transformada de Fourier.

3.3. Muestreo de sistemas continuos.

3.4. Reconstrucción de una señal muestreada.

3.5. Aliasing o enmascaramiento de frecuencias.

3.6. Reconstrucción usando mantenedores.

3.7. Obtención de la función de transferencia pulsada.

Obtención de la función de transferencia pulsada

- Al obtener la función de transferencia de un sistema muestreado hay que tener en cuenta el mantenedor de orden cero, cuya función de transferencia es:

$$H(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

- Procedimiento para obtener la función de transferencia pulsada:
  1. Obtener g'(t) aplicando transformada de Laplace inversa a G'(s) = H(s)G(s).
  2. Formar la secuencia de ponderación $\{ g'_k \} = g'(kT)$.
  3. Obtener la transformada Z como $G'(z) = \sum g'_k z^{-k}$.

- Este procedimiento es poco práctico y se puede aplicar este otro:
  1. Dado G(s) obtener G'(s) = G(s)/s.
  2. Obtener la transformada Z de G'(s).
  3. Calcular $G(z) = (1-z^{-1})G'(z)$.

Ejemplo

- Sea el sistema: $\frac{1}{s+a}$ ⇒ $G'(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{1}{s+a}$

- Primero aplicamos la transformada de Laplace inversa:

$$g'(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+a)}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-sT}}{s(s+a)}\right\}$$

Mismas funciones pero retrasadas

$$g'_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+a)}\right\} = \frac{1}{a}(1-e^{-at})$$

- Se forma la secuencia de ponderación:

$$\left\{g'_{1_k}\right\} = \frac{1}{a}\left\{1-e^{-akT}\right\}$$

Ejemplo

- Se aplica la transformada Z:

$$G_1(z) = \frac{1}{a}\mathcal{Z}\{1\} - \frac{1}{a}\mathcal{Z}\left\{e^{-akT}\right\} = \frac{1}{a}\left[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-aT}}\right]$$

- Y se resta la expresión retrasada:

$$G(z) = (1-z^{-1})G_1(z) = \frac{1}{a}\frac{1-e^{-aT}}{z-e^{-aT}}$$

- **Usando el otro método:**

$$G'(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{s+a}$$

- Mirando en tablas se obtiene:

$$G'(z) = \frac{1}{a}\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT}z^{-1})}$$

- Ahora se calcula $G(z) = (1-z^{-1})G'(z)$:

$$G(z) = (1-z^{-1})G'(z) = \frac{1}{a}\frac{z^{-1}-e^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})} = \frac{1}{a}\frac{1-e^{-aT}}{z-e^{-aT}}$$

Mismo resultado